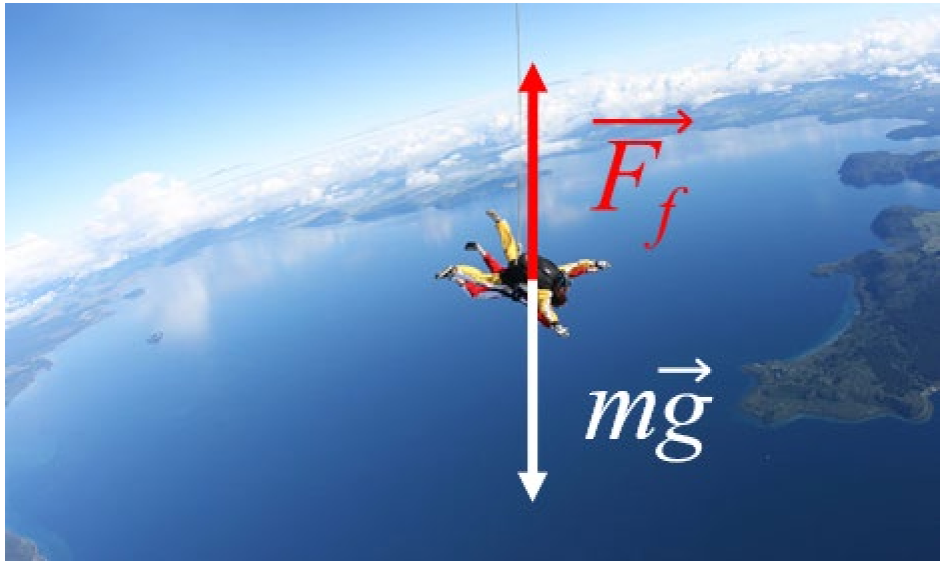
Cours 10 – 10/10/2024

5. Application des lois de Newton (frottements, poulies, ressorts)

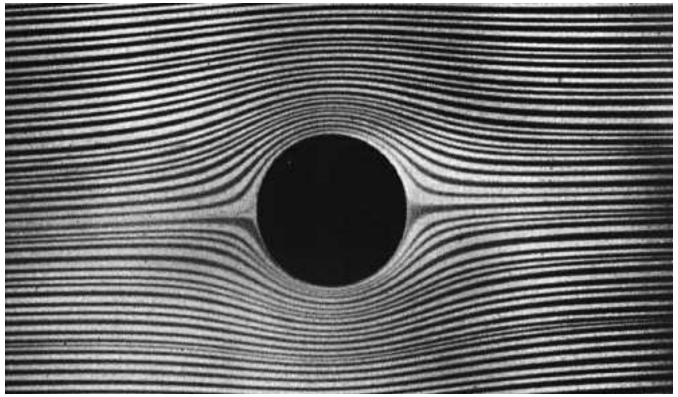
5.6. Force de frottement fluide

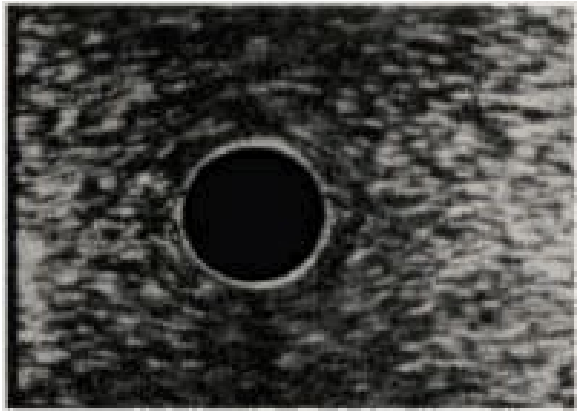


5.6. Force de frottement fluide

■ Régime laminaire et régime turbulent

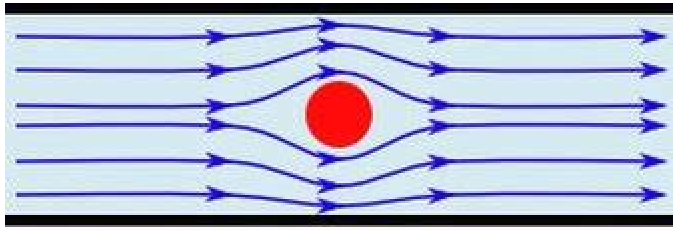
Lors du déplacement d'un objet dans un milieu fluide (gaz ou liquide), une force de frottement dite « fluide » se manifeste.
Elle dépend du type d'écoulement autour de l'objet. Cet écoulement peut être laminaire ou turbulent.

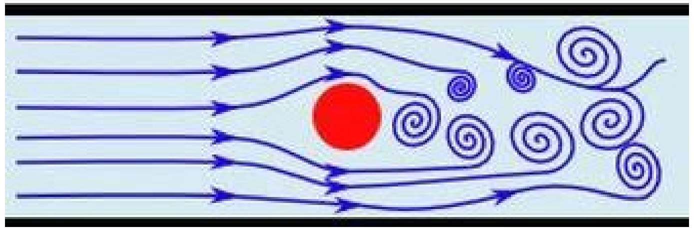


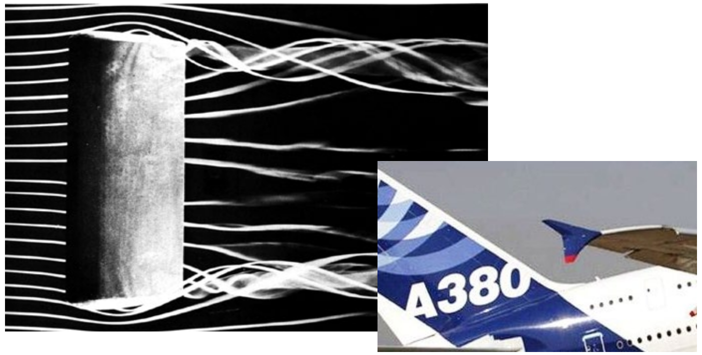


Ecoulement laminaire

Ecoulement turbulent



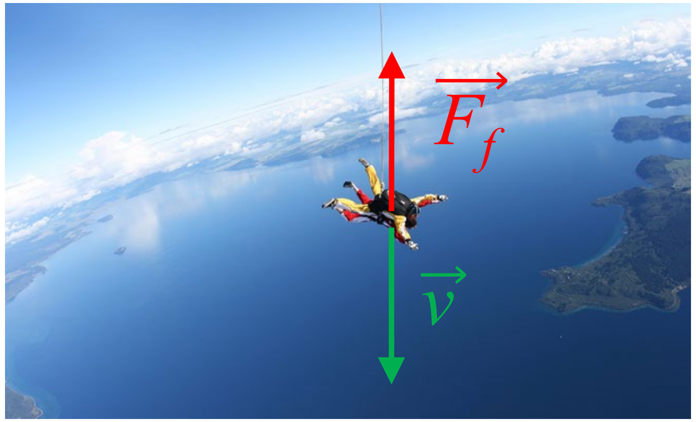




5.6. Force de frottement fluide

■ Régime laminaire et régime turbulent

Une force de frottement fluide est toujours opposée au déplacement et elle augmente avec la vitesse.



Vitesse de chute : $\vec{v} = \|\vec{v}\|\,\vec{u} = v\,\vec{u}$

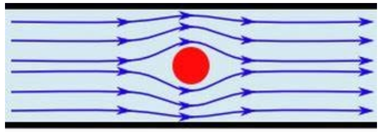
La force de frottement fluide s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{F_f} = -\,cte\; v^{n}\;\vec{u}$$

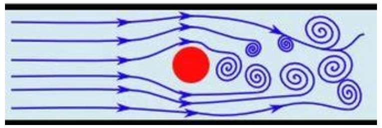
$\vec{u}$ *vecteur unitaire*

- *régime laminaire* $n = 1$
- *régime turbulent* $n = 2$

<u>rem</u>: le régime dépend de la vitesse et de la viscosité



$n = 1$



$n = 2$

5.6. Force de frottement fluide

■ Expression de la force de frottement en régime laminaire

Si un corps se déplace dans un fluide (gaz ou liquide) à la vitesse $\vec{v}$, suffisamment faible pour que l'on puisse négliger les turbulences, alors le régime est dit <u>laminaire</u>. La force de frottement est alors proportionnelle à la vitesse et de signe opposé :

$$\boxed{\overrightarrow{F_f} = -K\eta\,\vec{v}}$$

$$\begin{cases} K \text{ coefficient qui dépend de la forme du corps [m]} \\ \eta \text{ coefficient de viscosité [s N/m}^2\text{] ou [s Pa]} \end{cases}$$

Exemple de forme optimisée pour avoir un coefficient K minimum

bio-inspiration (bio-inspired technologies)

5.6. Force de frottement fluide

Coefficient de viscosité η

$$\vec{F}_f = -K\boxed{\eta}\,\vec{v}$$

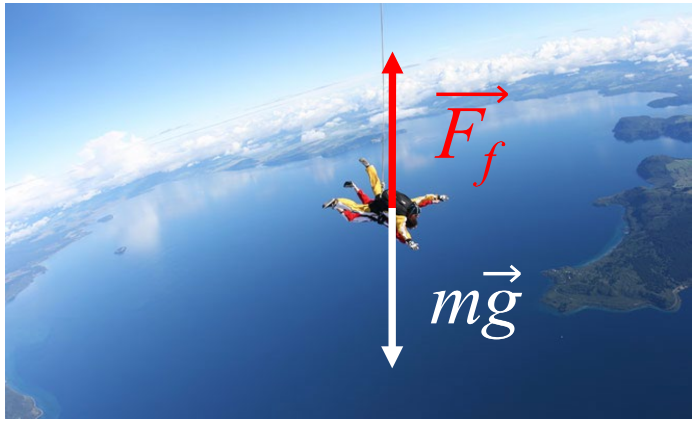
Liquides*	$\eta \times 10^2$	Gaz*	$\eta \times 10^4$
Eau (0°)	1,792	Air (0°)	1,71
Eau	1,005	Air	1,81
Eau (40°)	0,656	Air (40°)	1,90
Glycérine	1490	Hydrogène	0,93
Huile de ricin	986	Ammoniac	0,97
Méthanol	0,597	Gaz carbonique	1,46

*Toutes les valeurs sont à 20°, sauf lorsqu'on le spécifie.

Ces valeurs sont exprimées dans le système CGS, c'est-à-dire en poise (Po). L'unité dans le système international est le pascal-secondes (Pa·s), avec la relation 1 Pa·s = 10 Po

5.6. Force de frottement fluide

■ Vitesse limite



Chute libre (parachutiste) :

On suppose la vitesse parfaitement verticale

$$m\vec{a} = m\vec{g} - K\eta\vec{v}$$

lorsque $F_f = mg$ *alors* $v = cte = v_{lim}$

Juste après le saut hors de l'avion, la force de frottement est faible car la vitesse est elle-même très faible. Puis la vitesse v *augmente sous l'effet du poids. Par conséquent, la force de frottement augmente proportionnellement.*

A une certaine vitesse, la force de frottement devient égale au poids : $K\eta\, v = mg \Rightarrow a = 0$

Si $a = 0$*, alors la vitesse* v *est constante. Le régime est alors dit* ***stationnaire*** *: la vitesse n'évolue plus. Cette vitesse est la* ***vitesse limite*** v_{lim} et vaut :

$$\boxed{v_{lim} = mg/K\eta}$$

5.6. Force de frottement fluide

■ Chute libre avec frottement fluide

1) Vitesse verticale nulle au départ, puis elle augmente

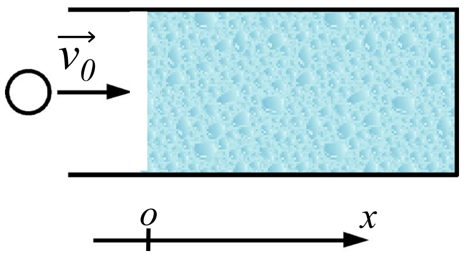
2) La vitesse vitesse verticale devient constante (v_{lim}) au bout d'un certain temps

Quelle est l'évolution de la vitesse en fonction du temps ?

5.6. Force de frottement fluide

■ Calcul de la vitesse $v(t)$ pour un frottement fluide sans la force de pesanteur

Un objet se déplace suivant Ox avec une vitesse initiale v_0. En arrivant en $x=0$ il subit une force de frottement fluide en régime laminaire qui va le ralentir. Quelle est l'expression de la vitesse en fonction du temps lors de la phase de ralentissement ? (on néglige ici la pesanteur)



2nde loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F_f}$

On projette sur Ox : $ma = -K\eta\, v$ *ou encore* $a = -\lambda v$ *avec* $\lambda = K\eta/m$

Nous avons alors l'équation suivante : $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = -\lambda v(t)$ *Equation différentielle du 1er ordre*

Résolution :

on sépare les variables v et t soit $\dfrac{dv}{v} = -\lambda\, dt$

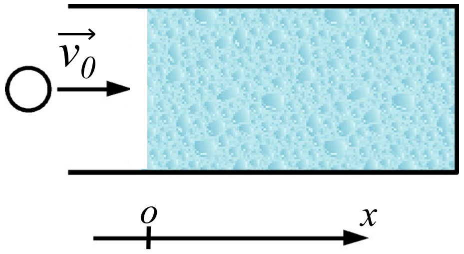
on intègre $\displaystyle\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\lambda \int_0^t dt \Rightarrow [ln(v(t)) - ln(v_0)] = -\lambda[t-0]$

$$ln\frac{v(t)}{v_0} = -\lambda t \overset{exp}{\Longrightarrow} e^{ln\frac{v(t)}{v_0}} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{v(t)}{v_0} = e^{-\lambda t}$$

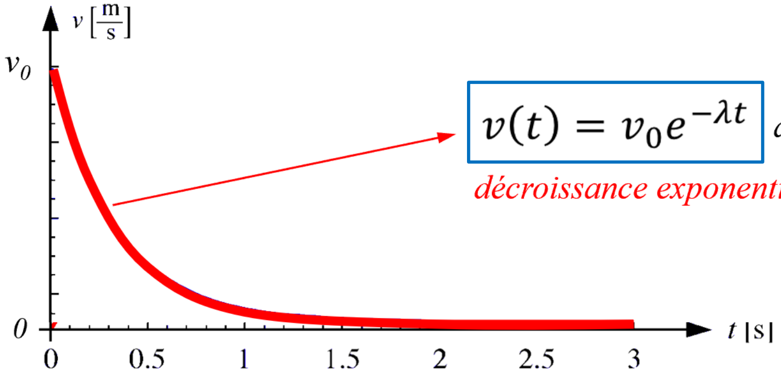
Et finalement: $\boxed{v(t) = v_0 e^{-\lambda t}}$

5.6. Force de frottement fluide

Calcul de la vitesse *v(t)* pour un frottement fluide <u>sans la force de pesanteur</u>



Evolution de la vitesse en fonction du temps



$$\boxed{v(t) = v_0 e^{-\lambda t}}$$ *avec* $\lambda = K\eta/m$

décroissance exponentielle de la vitesse

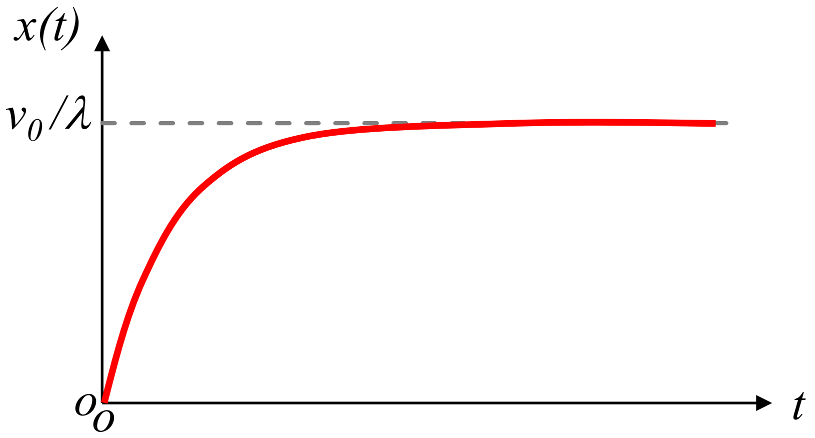
Calcul de la position *x(t)*

On intègre $\quad v(t) = \dfrac{dx}{dt} = v_0 e^{-\lambda t}$

$$\int_0^t \frac{dx}{dt}\,dt = \int_0^t v_0 e^{-\lambda t}\,dt \Rightarrow x(t) - 0 = -\frac{v_0}{\lambda}\left(e^{-\lambda t} - 1\right)$$

$$\boxed{x(t) = -\frac{v_0}{\lambda}\left(e^{-\lambda t} - 1\right)}$$

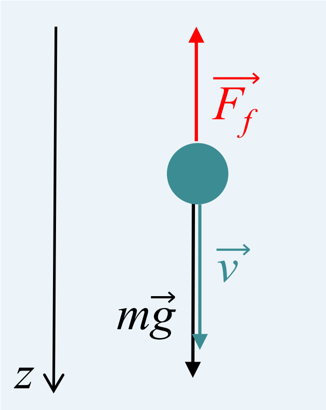
Evolution de la position en fonction du temps



5.6. Force de frottement fluide

■ Calcul de la vitesse $v(t)$ pour un frottement fluide avec la force de pesanteur

Un objet lâché à vitesse nulle est en chute libre. Il subit un frottement fluide en régime laminaire.
(on considère que le champ de pesanteur est constant)



2nde loi de Newton: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_f$ ⇨ *on projette sur Oz :* $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = g - \lambda v(t)$

$\vec{F}_f = -K\eta\,\vec{v}$ *avec* $\lambda = K\eta/m$

Il faut résoudre l'équation différentielle suivante : $\dfrac{dv(t)}{dt} + \lambda v(t) = g$

Ce que l'on sait du mouvement :

i) La vitesse atteint une vitesse limite aux temps longs ($t \to \infty$): $v_{lim} = F/K\eta = g/\lambda$ *avec* $\lambda = K\eta/m$

ii) La vitesse doit varier de façon exponentielle avant d'atteindre la vitesse limite

La solution doit donc avoir la forme suivante : $v(t) = v_{lim}(t \to \infty) + v_1 e^{-\lambda t}$

avec v_{lim} *et* v_1 *des constantes à déterminer*

■ Calcul de la vitesse $v(t)$ pour un frottement fluide avec la force de pesanteur

Equation différentielle: $\dfrac{dv(t)}{dt} + \lambda v(t) = g$ avec $v(t) = v_{lim} + v_1\, e^{-\lambda t}$

Forme générale de la solution

• On injecte $v(t)$ dans l'équation $\underbrace{\dfrac{dv(t)}{dt}} + \underbrace{\lambda v(t)} = \underbrace{g}$

on trouve $\underbrace{-\lambda v_1 e^{-\lambda t}} + \underbrace{\lambda v_{lim} + \lambda v_1 e^{-\lambda t}} = \underbrace{g}$ ⇨ $\boxed{v_{lim} = g/\lambda}$

$d'où\ v(t) = v_{lim} + v_1\, e^{-\lambda t} = g/\lambda + v_1 e^{-\lambda t}$

• On détermine v_1 avec la condition initiale $v(t=0) = 0$ ⇨ $0 = g/\lambda + v_1 \Rightarrow v_1 = -g/\lambda$

La vitesse en fonction de t s'écrit $\boxed{v(t) = \dfrac{g}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})}$

Rem : si la vitesse initiale est non nulle $(v_0 \neq 0)$ *et dirigée selon* $\vec{g}$ *alors* $v_1 = v_0 - g/\lambda$ *et* $v(t) = g/\lambda + (v_0 - g/\lambda)e^{-\lambda t}$

5.6. Force de frottement fluide

■ Calcul de la vitesse $v(t)$ pour un frottement fluide avec la force de pesanteur

Deux cas de figure en fonction des conditions initiales : $v_0 = 0$ *ou* $v_0 > g/\lambda\ (v_{lim})$